FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES



Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

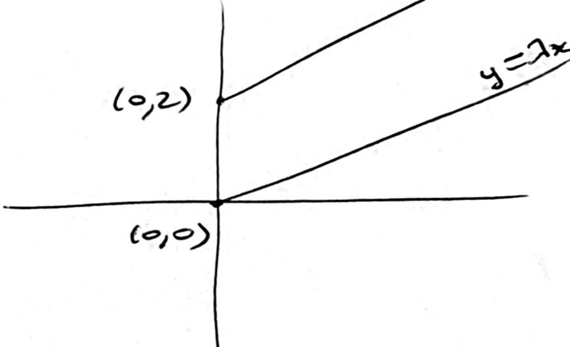
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x} \text{ si } x \neq 0, \text{ et } f(0,y) = 1 \text{ si } x = 0.$$

La fonction f admet-elle une limite au point $(0,2)$? au point $(0,0)$?

Solution :

La réponse est négative. Il suffit de se placer sur les droites dessinées ci-contre et d'écrire :



- $f(x, \lambda x+2) = \lambda + 1 + \frac{2}{x}$ qui n'admet pas de limite quand $x \to 0$

- $f(x, \lambda x) = 1 + \lambda$ qui vérifie $\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = 1+\lambda$ mais dont la limite $1+\lambda$ varie suivant la pente de la droite $y = \lambda x$ sur laquelle on s'est restreint.

[0][ufop0017] v1.00 Dany-Jack Mercier TD M41 99-00

1

Soit la fonction f définie par $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y) = \cos\frac{\pi}{2}(x^2+y^2)$. Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$ et représenter soigneusement l'ensemble $f^{-1}([0,1])$ dans le plan muni d'un repère orthonormal.

Solution :

~~Partiel M4 Analyse - Mars 2004~~

(non utilisé en partiel en 2004)

Ex1 · $f(\mathbb{R}^2) = [-1,1]$

· $(x,y) \in f^{-1}([0,1])$

$\Updownarrow$

$-\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq \frac{\pi}{2}(x^2+y^2) \leq -\frac{\pi}{2} + k2\pi + \pi$

$-1 + 4k \leq x^2+y^2 \leq -1 + 4k + 2$

$4k-1 \leq x^2+y^2 \leq 4k+1$

donc $f^{-1}([0,1]) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathcal{C}_k$

~~$\mathcal{C}_k = x^2$~~

où $\mathcal{C}_0$ = disque $\bar{B}(0,1)$ fermé de centre $(0,0)$ de rayon 1

$\mathcal{C}_k$ = couronne fermée comprise entre les cercles d'éq. $x^2+y^2 = 4k-1$ et $x^2+y^2 = 4k+1$, quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$-\frac{\pi}{2} + k2\pi + \pi$

$-\frac{\pi}{2} + k2\pi$

hachuré = à conserver

1 2 3 5

~~[tdfetpvr]~~ tdfop Ex.1 : Montrer que les fonctions suivantes à valeurs réelles et définies sur $(\mathbb{R}^2)^* \doteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$ mais que leurs dérivées partielles ne sont pas continues en $(0,0)$:

a)

$$\begin{cases} f(x,y) &= xy\sin\frac{1}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} f(x,y) &= (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= 0 \end{cases}$$

a)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = x \sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x} = y \sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Les dérivées partielles existent en tout point (x,y) distinct de $(0,0)$, et sont continues sur $\mathbb{R}^{2*}$. Donc f sera de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{2*}$.

En $(0,0)$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

* Les dérivées partielles ne sont pas continues en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{y\sin\frac{1}{x^2+y^2}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}}_{\doteq A(x,y)}$$

Si $y=x$, $A(x,x) = \frac{1}{2x}\cos\frac{1}{2x^2}$ et $\cos\frac{1}{2x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{k4\pi}$ $k\in\mathbb{N}^*$

Par suite, si l'on pose $x_k = \frac{1}{2\sqrt{k\pi}}$ où $k\in\mathbb{N}^*$, on aura $\lim_{k\to+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x_k,x_k) = -\infty$

et donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq (0,0)$

(td DAG 93-94, et 94-95)

* Différentiabilité de f en $(0,0)$:

Si oui, $df(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,dy = 0$. Voyons donc si :

$$f(h,k) - f(0,0) = hk \sin\frac{1}{h^2+k^2} = o(\|(h,k)\|)$$

ie si $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \sin\frac{1}{h^2+k^2} = 0$

On a bien $\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{(\rho\cos\theta)(\rho\sin\theta)}{\rho} = \rho\sin\theta\cos\theta \to 0 \quad (\rho\to 0)$

donc f est différentiable en $(0,0)$.

b) Même travail qu'au a).

* Aucun pb sur $\mathbb{R}^{2*}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{|h|}}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

On calcule si $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\to 0 \text{ } (x,y)\to(0,0)} \underbrace{- x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

si $x=y>0$, on obtient $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}.x}$ qui ne tend pas vers 0 quand $x\to 0$.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

* f est différentiable en $(0,0)$ car

$$\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0 \quad (h,k)\to(0,0)$$

FIN

[tdfctpvr] Ex.4 : Etudier la continuité et la différentiabilité des fonctions suivantes :

a)

$$\begin{cases} f(x,y) &= \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} f(x,y) &= \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= 0 \end{cases}$$

c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On pose :

$$\begin{cases} f(x,y) &= \frac{|xy|^\alpha}{x^2-xy+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= 0 \end{cases}$$

Le seul problème éventuel est en $(0,0)$.

a) $$f(x,y) = \frac{\rho\cos\theta \,.\, |\rho\sin\theta|}{\rho} = \rho\cos\theta\,.\,|\sin\theta| \to 0 \quad (\rho \to 0)$$

donc f est continue en $(0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ donc si f était différentiable, on aurait $df(0,0) = 0$. On a :

$$\underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\Delta} = \lim \frac{h|k|}{h^2+k^2} \neq 0$$

car si $h = k > 0$, $\Delta = \frac{h^2}{2h^2} = \frac{1}{2}$.

b) (au voisinage de $(0,0)$)

$$x\sin y - y\sin x = x\left(y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)\right) - y\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(x^3y - xy^3 + o(xy^3) - o(x^3y)\right)$$

(*) $$= \frac{1}{6}(x^3y - xy^3)\left(1 + \varepsilon(x,y)\right) \quad \text{avec } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y) = 0$$

Ainsi : $f(x,y) = \frac{1}{6} \underbrace{\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}}_{\to 0 \ ((x,y)\to(0,0))} \underbrace{(1 + \varepsilon(x,y))}_{\to 1} \longrightarrow 0$

(faire $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$)

<u>f est donc continue en (0,0)</u>

- <u>Différentiabilité en (0,0) :</u>

$$\Delta \doteq \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h\sin k - k\sin h}{(h^2+k^2)^{3/2}} \longrightarrow 0 \quad ((h,k)\to(0,0)) \quad ?$$

(*) montre que

$$\Delta = \frac{1}{6} \underbrace{\frac{h^3k - hk^3}{(h^2+k^2)^{3/2}}}_{\doteq A} (1 + \varepsilon(h,k))$$

et si $h = \rho\cos\theta$, $k = \rho\sin\theta$:

$$A(h,k) = \frac{\rho^4(\cos^3\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^3\theta)}{\rho^3} \to 0$$

<u>f est bien différentiable en (0,0)</u>

c) $f(x,y) = \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2 - xy + y^2}$

- $x^2 - xy + y^2 = 0$

$\Delta = -3y^2 \leq 0$, donc si $y \neq 0$, pas de racine réelle, et si $y = 0$, s'annule ssi $x = 0$. Le dénominateur est non nul ssi $(x,y) \neq (0,0)$. Le numérateur est défini ssi $xy \neq 0$, donc :

$$\text{Def } f = \mathbb{R}^2 \setminus \{xy = 0\}.$$

• $$f(x,y) = \frac{|\rho^2 \cos\theta \sin\theta|^\alpha}{\rho^2 (\cos^2\theta - \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta)} = \frac{\rho^{2(\alpha-1)} |\sin\theta\cos\theta|^\alpha}{1 - \sin\theta\cos\theta}$$

1) Si $\alpha > 1$, $\lim_{(0,0)} f(x,y) = 0$ donc f est continue en $(0,0)$

2) Si $\alpha = 1$, $f(x,y)$ prend plusieurs valeurs distinctes suivant θ, donc f n'est pas continue en $(0,0)$

3) Si $0 < \alpha < 1$, $\lim_{\rho \to 0} \rho^{2(\alpha-1)} = +\infty$ donc f n'est pas continue en $(0,0)$

• Différentiabilité : Si $\alpha \leq 1$, f n'est pas continue en $(0,0)$ donc ne sera pas différentiable en ce point. Si $\alpha > 1$, et si $df(0,0)$ existe, alors $df(0,0) = 0$ (cf dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$) et il faut voir si :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \underbrace{\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\doteq \Delta} = 0$$

Comme précédemment :

$$\Delta = \frac{|hk|^\alpha}{(h^2 - hk + k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\rho^{2(\alpha-1)} |\sin\theta\cos\theta|^\alpha}{(1 - \sin\theta\cos\theta)\,\rho} = \rho^{2\alpha-3} \frac{|\sin\theta\cos\theta|^\alpha}{1 - \sin\theta\cos\theta}$$

1) Si $2\alpha - 3 > 1$, ie $\alpha > 2$, f est différentiable en $(0,0)$ car $\lim \Delta = 0$

2) Si $\alpha \leq 2$, f ne le sera pas car $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \Delta \neq 0$

~~[tdfetpvr]~~ tdfop Ex.3 : Voici deux exemples de fonction possédant des dérivées à l'origine suivant toutes les directions mais sans y être différentiable.

a) Soit

$$\begin{cases} f(x,y) &= \frac{xy^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= 0 \end{cases}$$

Vérifier que f possède une dérivée suivant toutes les directions en tout point de $\mathbb{R}^2$. On notera $D_v f(x,y)$ la dérivée de f en (x,y) suivant la direction v.

Montrer que l'application $v \mapsto D_v f(0,0)$ n'est pas linéaire et en déduire que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

b) Soit

$$\begin{cases} f(x,y) &= \frac{x^3y}{x^4+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= 0 \end{cases}$$

Montrer que f possède une dérivée suivant toutes les directions en tout point de $\mathbb{R}^2$, que l'application $v \mapsto D_v f(0,0)$ est linéaire mais que pourtant f n'est pas différentiable en $(0,0)$ (On pourra considérer la restriction de f à la parabole $y = x^2$).

a) $D_v f(x,y)$ = dérivée de f en (x,y) suivant la direction $v = (\alpha,\beta)$

$$\doteqdot \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\alpha, y+t\beta) - f(x,y)}{t}$$

• f admet des dérivées partielles continues en tout point de $\mathbb{R}^{2*}$, donc sera de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{2*}$. On sait que

(P) f différentiable en (x,y) $\Rightarrow$ f admet une dérivée suivant la direction v en (x,y), pour tout v, et

$$D_v f(x,y) = df(x,y)(v)$$

de sorte que f admette des dérivées suivant n'importe quelle direction en tout point de $\mathbb{R}^{2*}$.

• <u>Etude en (0,0) :</u>

$$D_v f(0,0) \doteq \lim_{t\to 0} \frac{f(t\alpha,t\beta)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{(t\alpha)(t\beta)^2}{t^2\alpha^2+t^2\beta^2} = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

existe bel et bien.

• $v=(\alpha,\beta)\longmapsto D_v f(0,0) = \dfrac{\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$ n'est pas linéaire, donc f ne sera pas différentiable en $(0,0)$ d'après (P) (en effet, $df(x,y)$ est linéaire lorsqu'elle existe !)

b) f est C^1 sur $\mathbb{R}^{2*}$. En $(0,0)$:

• $D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{t^4\alpha^3\beta}{t^2(t^2\alpha^4+\beta^2)} = 0$

• $v\longmapsto D_v f(0,0)=0$ est linéaire. C'est l'appl. nulle.

• Cependant f n'est pas différentiable en $(0,0)$ car si c'était le cas, $df(0,0)=0$ et l'on aurait

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Calculons $\Delta = \dfrac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \dfrac{h^3k}{\sqrt{h^2+k^2}\,(h^4+k^2)}$ pour $k=h^2$:

$$\Delta(h,h^2) = \frac{h^5}{\sqrt{h^2+h^4}\,.2h^4} = \frac{1}{2\sqrt{1+h^2}} \longrightarrow \frac{1}{2} \text{ si } h\to 0_+$$

CQFD

Quel est l'ensemble de définition de la fonction f définie par

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2-y}}$$

si $x^2+y^2 \neq 0$, et $f(0,0)=0$?

Rechercher les lignes de niveau de f.

---

1) $x^2-y>0 \iff y<x^2 \iff M\binom{x}{y}$ appartient à l'extérieur de la parabole $\mathcal{P}$: $y=x^2$.

Def f = { extérieur de la parabole $\mathcal{P}$ } $\cup \{0\}$

$y=x^2$
$\mathcal{P}$
Def f

2) Notons $\Gamma_k = \{ M\binom{x}{y} \,/\, f(x,y)=k \}$ la ligne de niveau de f pour k.

$$f(x,y)=k \iff \frac{x}{\sqrt{x^2-y}} = k \iff \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2-y} = k^2 \\ kx \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)x^2 \\ kx \geq 0 \end{cases} \text{(si } k\neq 0)$$

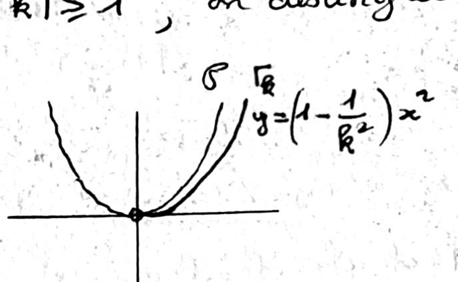
montre que Γ_k sera la moitié de la parabole $y=\left(1-\frac{1}{k^2}\right)x^2$ pour $kx \geq 0$, et lorsque $k \neq 0$

<u>NB</u> : La parabole $y=\left(1-\frac{1}{k^2}\right)x^2$ est toujours dans Def f puisque $1-\frac{1}{k^2} < 1$

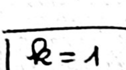
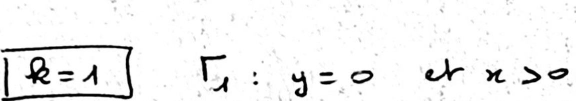
* Si $k=0$, $\Gamma_0 = \{x=0\}$ = demi-droite $\{x=0, y\leq 0\}$.

.../...

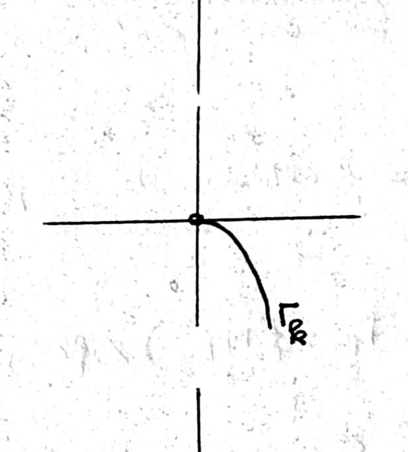
<u>Conclusion</u> : Comme $1 - \frac{1}{k^2} \geq 0 \iff |k| \geq 1$, on distinguera les cas :



$\boxed{k > 1}$ Demi-parabole :

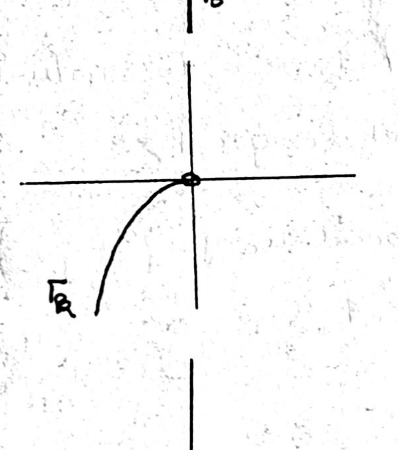



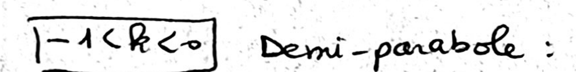
$\boxed{k = 1}$ Γ_1 : $y = 0$ et $x > 0$



$\boxed{0 < k < 1}$ Γ_k = demi-parabole :

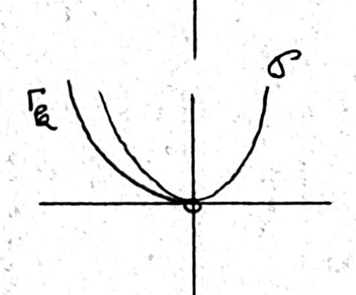
$\boxed{k = 0}$ Γ_0 : $x = 0$ (et $\binom{x}{y} \in \mathcal{D}ef\,f$)





$\boxed{-1 < k < 0}$ Demi-parabole :

$\boxed{k = -1}$ Γ_{-1} : $y = 0$ et $x < 0$



$\boxed{k < -1}$ Demi-parabole

> [Rappel] Ex.2 : Montrer que les applications suivantes sont différentiables sur $(\mathbb{R}^2)^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et qu'elles admettent des dérivées partielles en $(0,0)$. Sont-elles différentiables en $(0,0)$?
>
> a)
> $$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$
>
> b)
> $$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

La différentiabilité de ces fonctions est claire sur $\mathbb{R}^{2*}$ puisqu'elles admettent des dérivées partielles continues en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^{2*}$.
Étudions les en $(0,0)$.

a)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$
évident

f sera donc différentiable en $(0,0)$ ssi $f(h,k) = o(\|(h,k)\|)$, i.e.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Or $\dfrac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \dfrac{hk}{h^2+k^2}$ ne tend pas vers 0 car si $h = k$, $\to \dfrac{1}{2}$

Cl : <u>f n'est pas différentiable en $(0,0)$</u>

b) Les dérivées partielles existent en $(0,0)$ car

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h} \dfrac{h^3}{h^2} = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{1}{k} \dfrac{-k^3}{k^2} = -1 \end{cases}$$

Si f est différentiable en $(0,0)$, alors $df(0,0) = dx - dy$. Voyons donc si :

$$f(h,k) - h + k = o\left(\|(h,k)\|\right)$$

ie si

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left(\frac{h^3-k^3}{h^2+k^2} - h + k\right)}_{\doteq A(h,k)} = 0 \qquad (*)$$

$$A(h,k) = \frac{hk(h-k)}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

Posons $h = \rho\cos\theta$ et $k = \rho\sin\theta$.

$$A(h,k) = \sin\theta\cos\theta\,(\cos\theta - \sin\theta)$$

Ainsi, pour $\theta = \frac{\pi}{6}$, $A(h,k) = \frac{\sqrt{3}}{8}(\sqrt{3}-1) \neq 0$, et donc $(*)$ est faux.

Ccl : f n'est pas différentiable en $(0,0)$